<u>NOMBRES RATIONNELS</u>

- La fraction comme partage
- La fraction comme quotient : les nombres rationnels
- Égalité de quotients: amplification et simplification de fractions

1. La fraction comme partage en parts égales

2. La fraction comme nombre quotient

Étant donnés deux ***nombres entiers*** *a* et *b*, $b \neq 0$, **la fraction** $\frac{a}{b}$ est définie comme **le nombre quotient du nombre a par le nombre b:**

$$\frac{a}{b} = a : b = q$$

dividende diviseur

$$a : b = \frac{a}{b}$$

Dans cette écriture :

le nombre a est le **numérateur**,

le nombre b est le **dénominateur**.

Conséquences :

La fraction $\frac{a}{b}$ est donc un nombre q (quotient) qui multiplié par b donne a

$\boxed{\frac{a}{b} \times b = a}$ ou le nombre qui complète l'égalité : $\boxed{b \times ..?.. = a}$

Les nombres rationnels

On définit ainsi des nouveaux nombres :

Définition : un NOMBRE RATIONNEL est un nombre qui peut s'écrire comme un quotient de deux nombres entiers

$r = \dfrac{a}{b}$, où a et b sont des nombres entiers ($b \neq 0$)

Remarques :

Un nombre rationnel peut être un nombre entier.

$$\frac{12}{4} = 3$$

Un nombre rationnel peut être un nombre décimal.

$$\frac{9}{4} = 2{,}25$$

Un nombre rationnel peut n'être ni entier ni décimal.

$$\frac{11}{3}$$

La division de 11 par 3 ne se termine jamais.

Conclusion : Ces nouveaux nombres, les rationnels, **étendent** les ensembles de nombres déjà connus : les entiers et les décimaux,

car il y a des nombres rationnels qui ne sont ni entiers, ni décimaux.

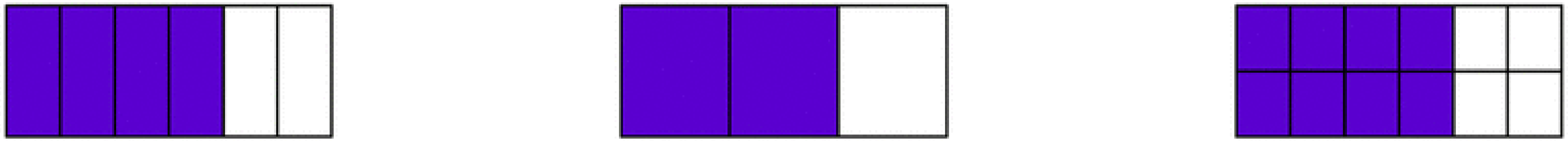
3. Égalité de quotients: amplification et simplification de fractions

3.1. Quotients égaux

Règles Soient a, b et k des nombres, avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$.

Un quotient ne change pas quand on **multiplie** son numérateur et son dénominateur par un **même nombre non nul**.
Un quotient ne change pas quand on **divise** son numérateur et son dénominateur par un **même nombre non nul**.

Exemple : Les aires des trois surfaces coloriées sont égales. Déduis-en des fractions égales.



Les fractions $\frac{4}{6}$, $\frac{2}{3}$ et $\frac{8}{12}$ sont égales et on a : $\frac{4}{6} = \frac{4 \div \mathbf{2}}{6 \div \mathbf{2}} = \frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3} = \frac{2 \times \mathbf{4}}{3 \times \mathbf{4}} = \frac{8}{12}$.

Démonstration

3.2. Amplification des fractions

Propriété 1 :

Une fraction $\frac{a}{b}$ ne change pas lorsque l'on multiplie son numérateur a et son dénominateur b par un même nombre non nul :

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{a\times k}{b\times k}}$$ quel que soit le nombre k non nul

(**amplification** de la fraction $\frac{a}{b}$ par l'entier k)

Exemple : En amplifiant la fraction $\frac{2}{3}$ par 4 on obtient la fraction $\frac{8}{12}$:

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times 4}{3\times 4}=\frac{8}{12}$$

3.3. Simplification des fractions

Propriété 2 : **simplification** d'une fraction

Une fraction $\frac{a}{b}$ ne change pas lorsque l'on divise son numérateur a et son dénominateur b par un même nombre non nul :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}}$$

quel que soit le nombre k non nul

(**simplification** de la fraction $\frac{a}{b}$ par l'entier k)

Exemple : En simplifiant la fraction $\frac{12}{15}$ par 3 on obtient la fraction $\frac{4}{5}$

÷ 3

$$\frac{12}{15} = \frac{12:3}{15:3} = \frac{4}{5}$$

÷ 3

Attention ! : **Les propriétés 1 et 2**

ne s'appliquent jamais pour l'addition, ni pour la soustraction !

$$\times 2$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

$$\times 2$$

$$+5$$

$$\frac{3}{4} \neq \frac{8}{9} \qquad \text{car : } \frac{3}{4} = 0{,}75 \quad \text{et} \quad \frac{8}{9} \approx 0{,}9$$

$$+5$$

Simplification des fractions Méthode : Pour simplifier une fraction

- on cherche les diviseurs du numérateur et du dénominateur (ce sont des **entiers**)
- on divise le numérateur et le dénominateur par les diviseurs qui leur sont communs

Remarque: Une fraction que l'on ne peut plus simplifier est dite ***irréductible***.

Remarque: Une fraction simplifiée doit rester une fraction (quotient de 2 entiers)

A revoir ! : le chapitre de divisibilité (diviseurs, multiples)

Exemple : Simplifier le plus possible la fraction $\frac{48}{60}$.

Pour cela on cherche les diviseurs communs au numérateur et au dénominateur.

$$\frac{48}{60}=\frac{2\times 24}{2\times 30}=\frac{24}{30}=\frac{6\times 4}{6\times 5}=\frac{4}{5}$$

La fraction $\frac{4}{5}$ n'est plus simplifiable, elle est donc irréductible.

C'est la fraction la plus simple égale à $\frac{48}{60}$.

L'utilité de ces propriétés :

1) l'amplification : pour ramener des fractions au même dénominateur

- en vue de les comparer ou
- de faire des opérations d'addition ou soustraction

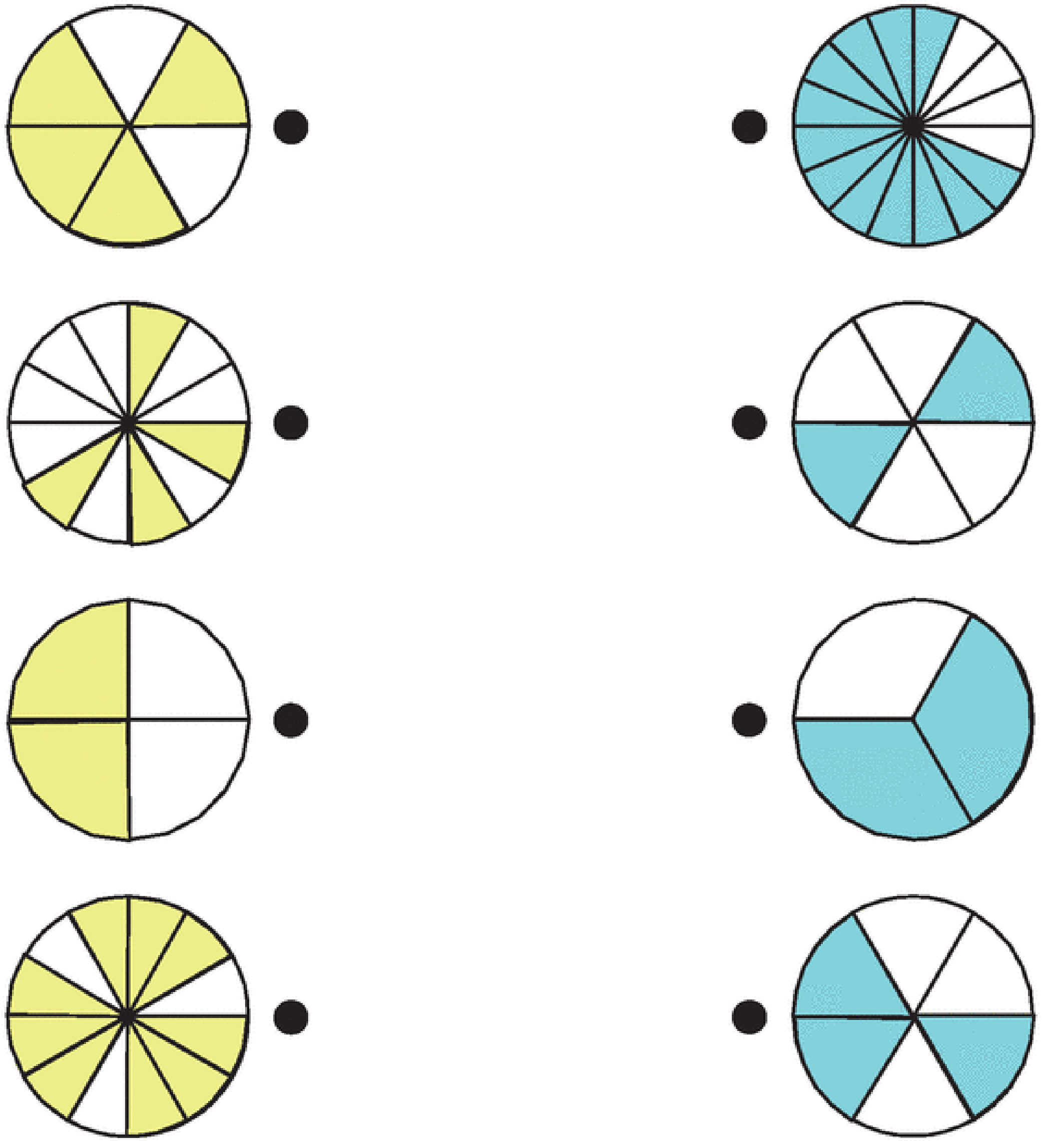
$$\frac{2}{3} \ ? \ \frac{5}{6} : \qquad \frac{2}{3} = \frac{2x2}{3x2} = \frac{4}{6} < \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{2x2}{3x2} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6}$$

2) la simplification : pour ramener une fraction à une forme plus simple

$$\frac{axk}{bxk} = \frac{a}{b} ; \qquad \frac{35}{14} = \frac{5x7}{2x7} = \frac{5}{2}$$

1 Relie les figures dont les proportions de surface coloriée sont égales. Écris alors les égalités de fractions correspondantes.



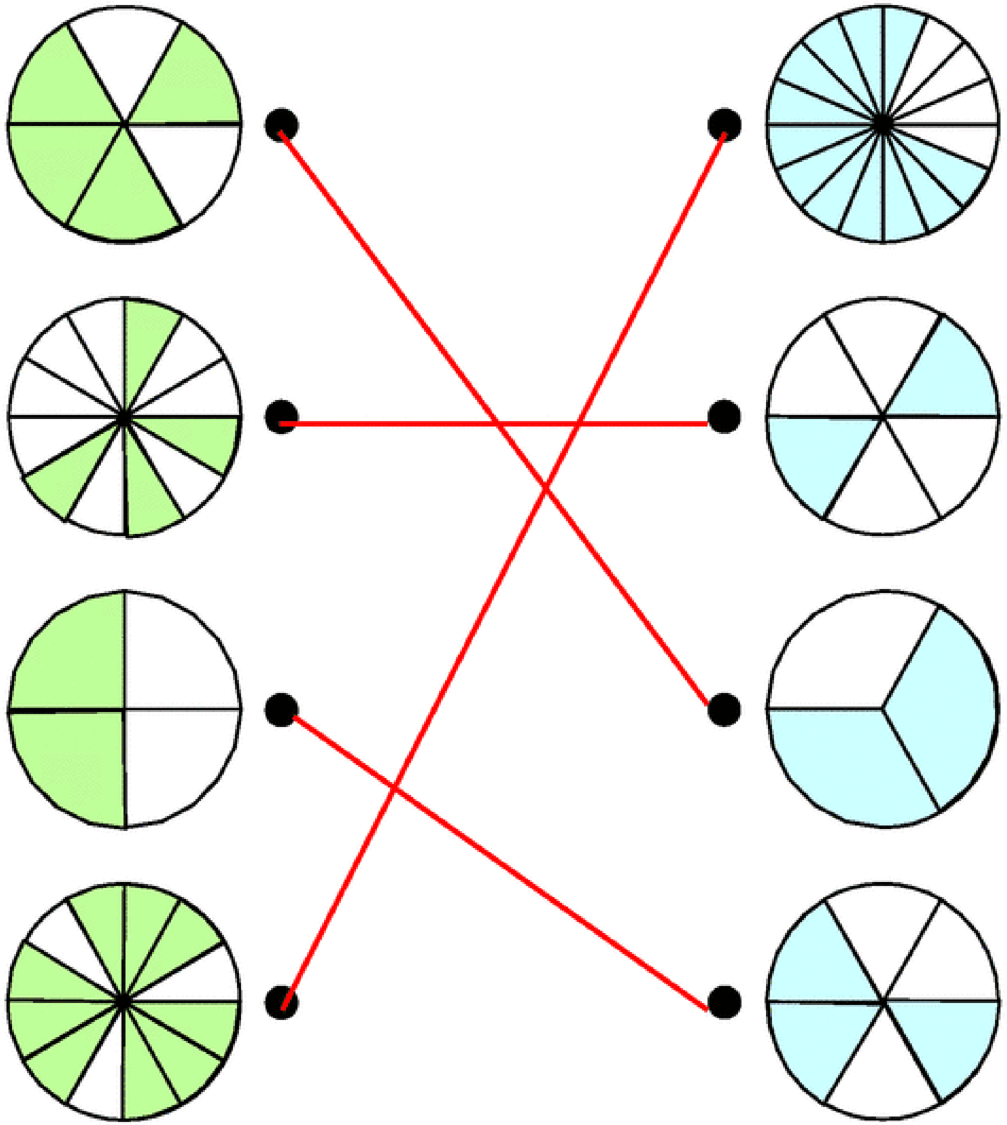
$\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

$\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

$\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

$\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

1 Relie par un trait les figures dont les proportions de surface grisée sont égales. Écris alors les égalités de fractions correspondantes.



$$\frac{9}{12} = \frac{12}{16}$$

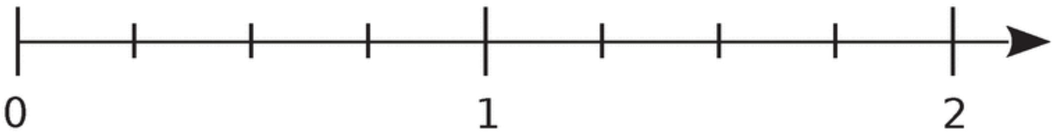
$$\frac{4}{12} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

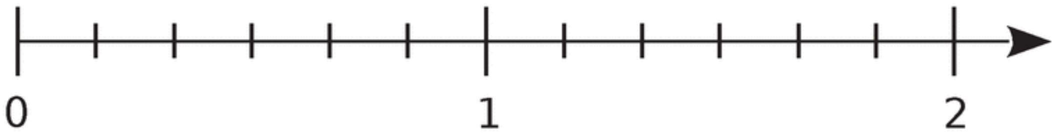
$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

2 Place les points suivants sur les axes gradués correspondants.

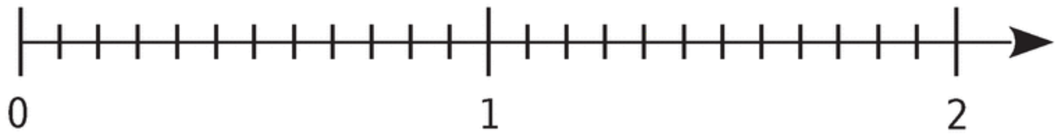
a. A $\left(\frac{3}{4}\right)$ B $\left(\frac{5}{4}\right)$ C $\left(\frac{7}{4}\right)$



b. D $\left(\frac{5}{6}\right)$ E $\left(\frac{10}{6}\right)$ F $\left(\frac{7}{6}\right)$



c. G $\left(\frac{9}{12}\right)$ H $\left(\frac{20}{12}\right)$ I $\left(\frac{10}{12}\right)$



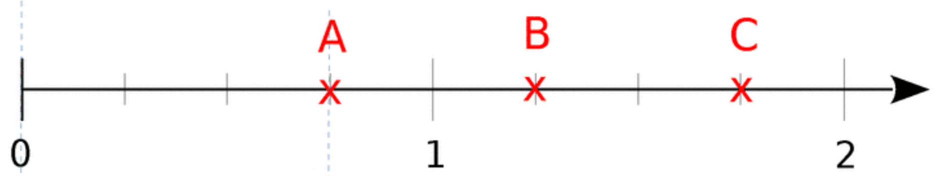
d. Quels sont les points situés à la même abscisse ? ....

e. Quelles égalités de fractions peux-tu écrire ?

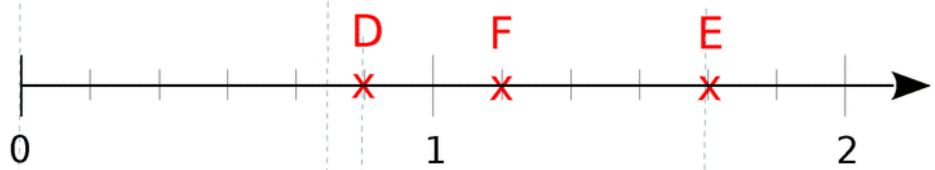
....

2 Place les points suivants sur les axes gradués correspondants.

a. A $\left(\frac{3}{4}\right)$ B $\left(\frac{5}{4}\right)$ C $\left(\frac{7}{4}\right)$



b. D $\left(\frac{5}{6}\right)$ E $\left(\frac{10}{6}\right)$ F $\left(\frac{7}{6}\right)$



c. G $\left(\frac{9}{12}\right)$ H $\left(\frac{20}{12}\right)$ I $\left(\frac{10}{12}\right)$

d. Quels sont les points situés à la même abscisse ? A et G D et I E et H

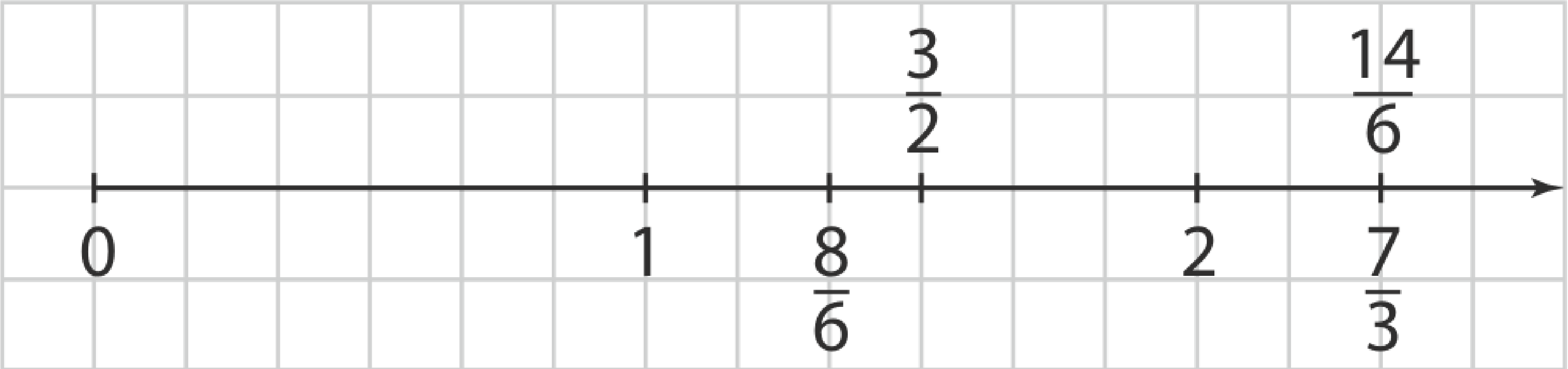
e. Quelles égalités de fractions peux-tu é crire ? $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$ $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$ $\frac{10}{6}=\frac{20}{12}$

40 Utiliser cette demi-droite graduée pour dire si les deux quotients sont égaux.

a. $\frac{14}{6}$ et $\frac{7}{3}$

b. $\frac{3}{2}$ et $\frac{8}{6}$

40



Donc $\frac{7}{3} = \frac{14}{6}$ et $\frac{8}{6} \quad \frac{3}{2}$.

23 Recopie ce tableau. Pour chaque fraction, coche le (ou les) nombre(s) par le(s)quel(s) elle est simplifiable.

		2	3	4	5	9
a.	$\frac{18}{16}$					
b.	$\frac{5}{10}$					
c.	$\frac{30}{45}$					
d.	$\frac{12}{24}$					
e.	$\frac{27}{36}$					
f.	$\frac{70}{20}$					

23 Recopie ce tableau. Pour chaque fraction, coche le (ou les) nombre(s) par le(s)quel(s) elle est simplifiable.

		2	3	4	5	9
a.	$\frac{18}{16}$	oui				
b.	$\frac{5}{10}$				oui	
c.	$\frac{30}{45}$		oui		oui	
d.	$\frac{12}{24}$	oui	oui	oui		
e.	$\frac{27}{36}$		oui			oui
f.	$\frac{70}{20}$	oui			oui	

27 Voici les diviseurs de trois nombres.

	Liste des diviseurs
42	1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 ; 42.
56	1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 8 ; 14 ; 28 ; 56.
60	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5;6 ; 10 ; 12 ; 15; 20 ; 30 ; 60.

Aide-toi de cette liste pour simplifier au maximum chaque fraction.

a. $\frac{42}{56}$ **b.** $\frac{56}{60}$ **c.** $\frac{60}{42}$

a. $\frac{42}{56} = \frac{14\times3}{14\times4} = \frac{3}{4}$

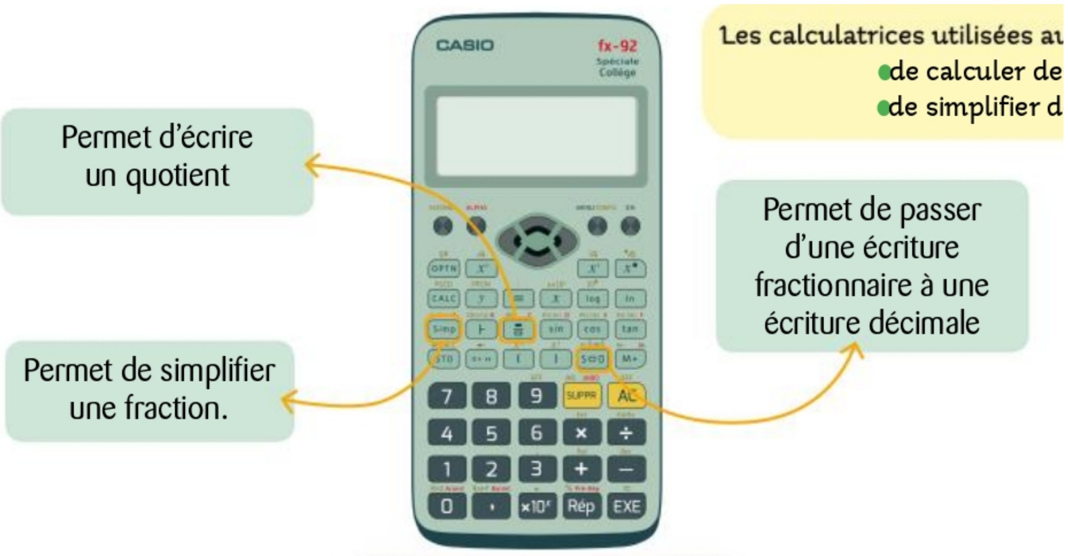
b. $\frac{56}{60} = \frac{4\times14}{4\times15} = \frac{14}{15}$

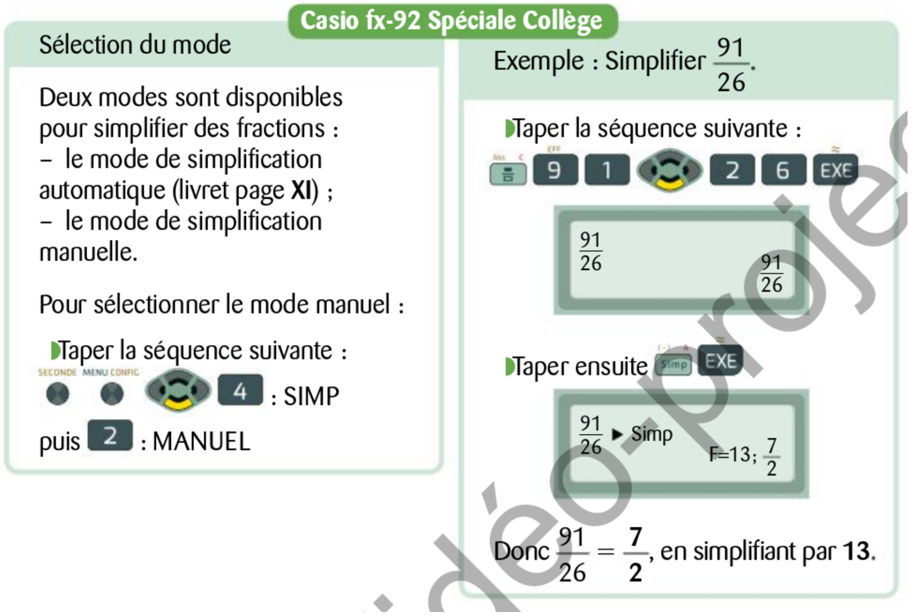
c. $\frac{60}{42} = \frac{6\times10}{6\times7} = \frac{10}{7}$

J'utilise une calculatrice

Les calculatrices de collège permettent

- de calculer des quotients
- de simplifier des fractions





19 Simplifier chacune des fractions suivantes :

On précisera le nombre par lequel on a simplifié.

a) $\frac{7540}{485}$ b) $\frac{153}{102}$ c) $\frac{684}{210}$ d) $\frac{125}{625}$ e) $\frac{860}{754}$