Utiliser le calcul littéral

- 1) Utiliser une expression littérale (une formule) pour résoudre un problème

  Activités 1 et 2

  Utiliser une expression littérale en géométrie

  Utiliser une expression littérale en physique

- 2) Calculer la valeur d'une expression littérale

  Programmes de calcul , arbres de calcul

- 3) Vérifier une égalité

1) Utiliser une expression littérale (une formule)

Activité 1 Des formules

1. À quelle grandeur géométrique correspond chacune des expressions suivantes ?

- $2 \times (L + l)$
- $4 \times c$
- $c \times c$
- $2 \times \pi \times r$
- $L \times l \times h$
- $2 \times L + 2 \times l$

2. Calcule le périmètre d'un cercle de rayon 25 cm en utilisant une des expressions ci-dessus.

3. Pourquoi deux des expressions ci-dessus sont-elles équivalentes ? Cite-les.

Activité 1

1. À quoi correspond chacune des expressions suivantes ?

- $2 \times (L + l)$

  périmètre du rectangle

- $2 \times \pi \times r$

  périmètre du cercle

- $4 \times c$

  périmètre du carré

- $L \times l \times h$

  volume du pavé droit

- $c \times c$

  aire du carré

- $2 \times L + 2 \times l$

  périmètre du rectangle

2. Calcule le périmètre d'un cercle de rayon 25 cm en utilisant une des expressions ci-dessus.

$P = 2 \times \pi \times 25 = 50 \times \pi$ (si on prend $\pi \approx 3{,}14$ on trouve $P \approx 157$ cm)

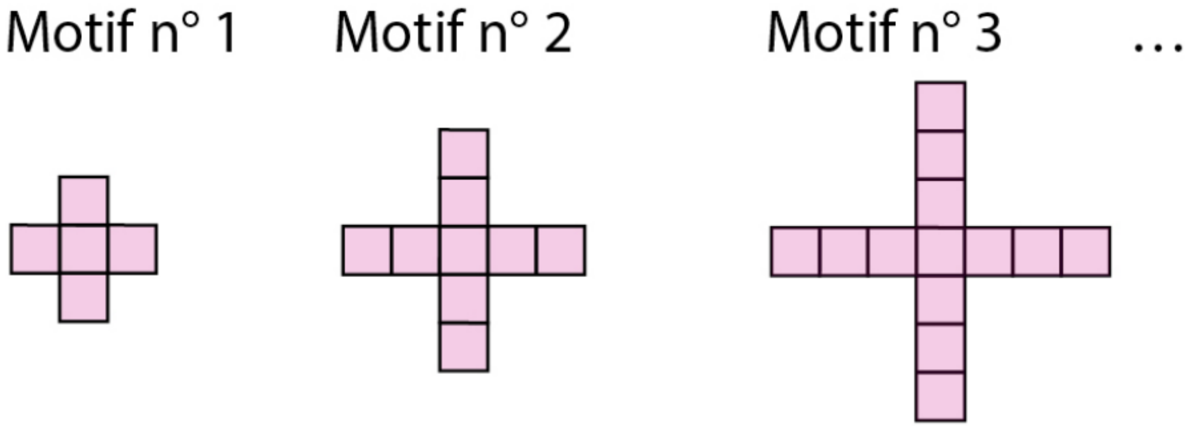
3. Pourquoi deux des expressions ci-dessus sont-elles équivalentes ?

Parce qu'elles permettent toutes les deux de calculer le périmètre d'un rectangle.

La première formule énonce que le périmètre est égal à 2 fois le demi-périmètre (largeur + longueur) tandis que la seconde énonce que le périmètre est égal à 2 fois la longueur plus deux fois largeur.

Activité 2 Déterminer des expressions littérales

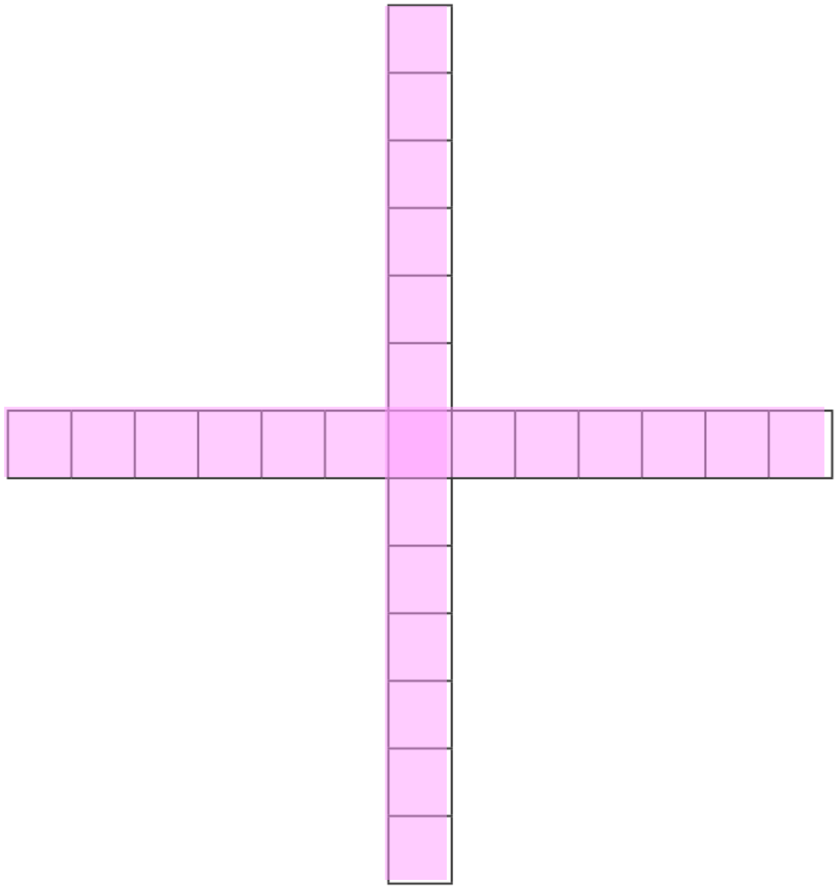
On considère la suite de motifs géométriques suivants :



a) Combien de petits carres le motif n° 6 comporte-t-il ?

b) On considère le motif numéro n .
Exprimer, en fonction de n, le nombre de petits carres qu'il comporte ?

c) Utiliser cette expression pour calculer combien de petits carres comporte le motif n° 100.



a. Le motif n° 6 comporte 25 petits carrés.

b. Le motif numéro n a 4 « branches » de n carrés plus le carré central.

Donc le motif numéro n comporte   **4 × n + 1** carrés.

c. 4 × 100 + 1 = 401 donc le motif numéro 100 comporte 401 carrés.

Expression littérale (formule)

- Si on veut établir des relations entre plusieurs grandeurs, qui sont valables pour n'importe quelles valeurs numériques, on utilise des lettres pour représenter ces valeurs numériques, de manière générique.
- Les expressions peuvent être calculées pour différentes valeurs numériques attribuées aux lettres.

Définition Une expression **littérale** est une expression contenant une ou plusieurs lettres, ces lettres désignant des nombres.

Propriété Une égalité où interviennent des expressions littérales peut être **vraie** pour certaines valeurs affectées aux lettres et **fausse** pour d'autres.

Méthode Pour tester si une égalité est vraie pour des valeurs numériques attribuées aux lettres :
① on calcule la valeur du **membre de gauche** en remplaçant chaque lettre par le nombre donné ;
② on calcule la valeur du **membre de droite** en remplaçant chaque lettre par le nombre donné ;
③ on observe l'égalité ou non des deux valeurs obtenues et on conclut.

Exemple
- L'égalité $5 + x = 8$ est vraie pour $x = 3$. En effet, $5 + 3 = 8$.
- L'égalité $5 + x = 8$ est fausse pour $x = 4$. En effet, $5 + 4 = 9$ et $9 \neq 8$.

2) Calculer la valeur d'une expression littérale :
Les programmes de calcul

Exercice 1) Voici deux programmes de calcul.

Programme 1	Programme 2
• Choisir un nombre.	• Choisir un nombre.
• Ajouter 4.	• Multiplier par 3.
• Multiplier par 3.	• Ajouter 4.

a) Entourer, dans la liste ci-dessous, l'expression littérale qui correspond à chaque programme.

$3 \times n + 4$ $4 \times n + 3$ $3 \times (n + 4)$

b) Donner le résultat de chaque programme de calcul pour n = 5.

Programme 1
- Choisir un nombre.
- Ajouter 4.
- Multiplier par 3.

Programme 2
- Choisir un nombre.
- Multiplier par 3.
- Ajouter 4.

$3 \times n + 4$ | $4 \times n + 3$ | $3 \times (n + 4)$

b) Donner le résultat de chaque programme de calcul pour n = 5.

<u>Programme 1 :</u> 3 x (n + 4)
3 x (5 + 4)
3 x 9
27

<u>Programme 1 :</u> 3 x n + 4
3 x 5 + 4
15 + 4
19

<u>Exercice 2)</u> On considère le programme de calcul suivant :

- Choisis un nombre.
- Calcule le triple de ce nombre.
- Ajoute 5.
- Double le résultat obtenu.

a) Effectue ce programme pour le nombre 4.

b) Effectue ce programme pour le nombre 1,5.

c) Effectue ce programme pour un nombre de départ noté x et écris une expression du résultat en fonction de x.

- Choisis un nombre.
- Calcule le triple de ce nombre.
- Ajoute 5.
- Double le résultat obtenu.

a. Effectue ce programme pour le nombre 4.

pour le nombre 4, le programme donne :

$(4\times3 +5)\times 2 = (12 +5)\times\ 2 = 17\times 2 =34$

b. Effectue ce programme pour le nombre 1,5.

pour le nombre 1,5 , le programme donne :

$(1{,}5\times 3 +5)\times 2 = (4{,}5 +7) \times 2 = 11{,}5 \cdot\times 2 =23$

c. Effectue ce programme pour un nombre x de départ et écris une expression simplifiée du résultat en fonction de x.

pour tout nombre x , le programme donne :

$(x \times3 +5) \times2 = (3x +5)\times2= 6x +10$

d. Utilise cette expression pour calculer le résultat obtenu à partir du nombre $\frac{7}{2}$ puis du nombre 0.

pour $x = \frac{7}{2}$; $6x +10$ devient :

$6\times \frac{7}{2} +10= 3\cdot 7+10= 21+10= 31$

pour $x = 0$, $6x +10$ devient : $6\times0+10= 10$

Exercice supplémentaire

11 Voici un programme de calcul.

- Choisir un nombre.
- Ajouter 4.
- Multiplier par 5.

1. Calculer le nombre obtenu si l'on choisit comme nombre de départ :

a. 5 **b.** 1,2 **c.** 0 **d.** 3,5

2. On note n le nombre choisi au départ.
Exprimer le résultat obtenu en fonction de n.

Calculer la valeur d'une expression littérale

Exercice 3)

Pour chacune des expressions suivantes calculez sa valeur si $x = 2$:

$A = 5 + 4 \times x$

$B = 4 \times (x - 2) \times (x + 8)$

$C = 7 \times x - 2 \times (4 \times x - 5)$

$A = 5 + 4 \times x$

$A = 5 + 4 \times 2$

$A = 5 \;+\; 8$

$A = \;13$

$B = 4 \times (x - 2) \times (x + 8)$

$B = 4 \times (2 - 2) \times (2 + 8)$

$B = 4 \times 0 \times 10 = 0$

$B = 0$

$C = 7 \times x - 2 \times (4 \times x - 5)$

$C = 7 \times 2 - 2 \times (4 \times 2 - 5)$

$C = 7 \times 2 - 2 \times (8 - 5)$

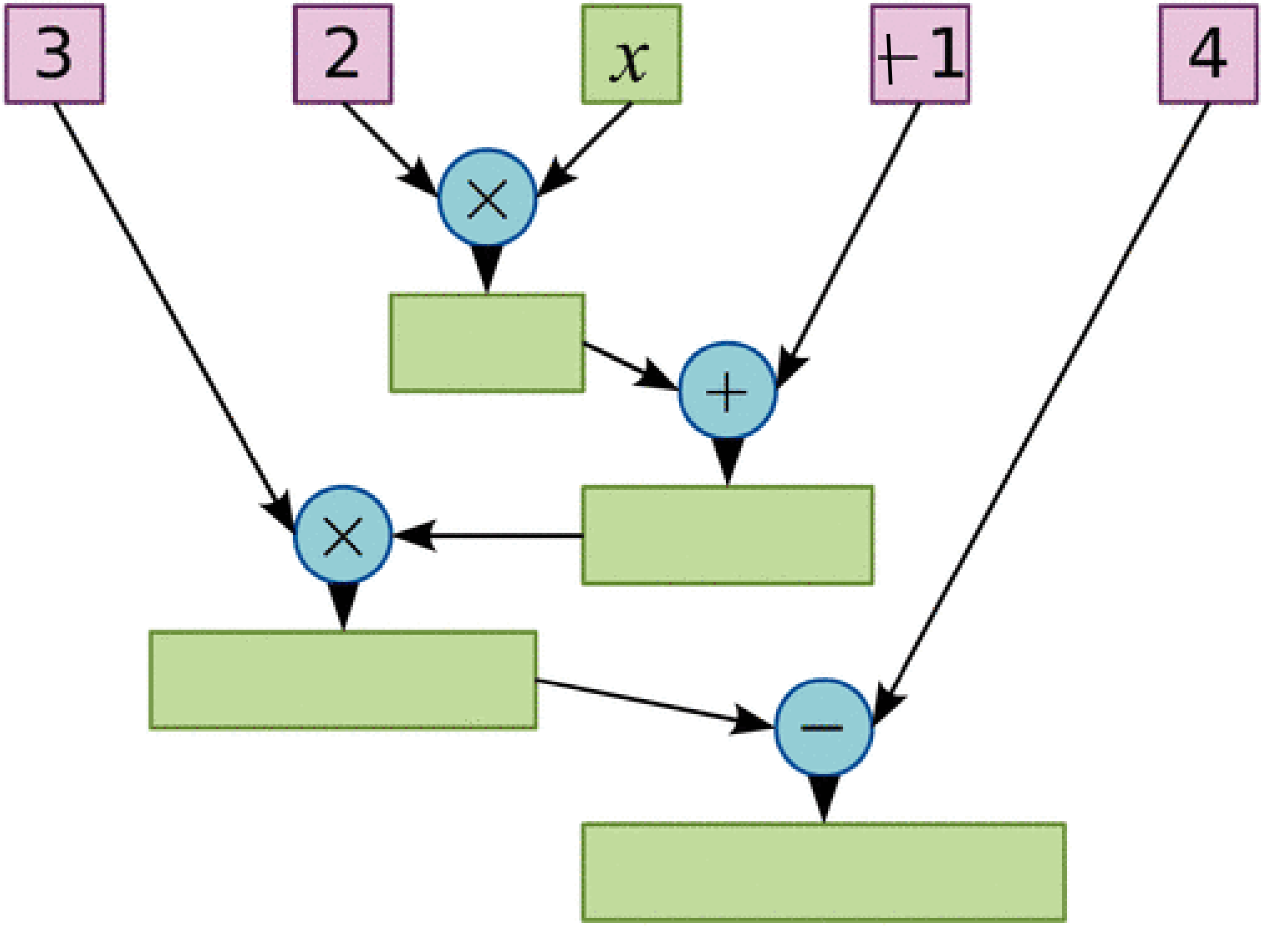
$C = 7 \times 2 - 2 \times 3$

$C = 14 - 6$

$C = 8$

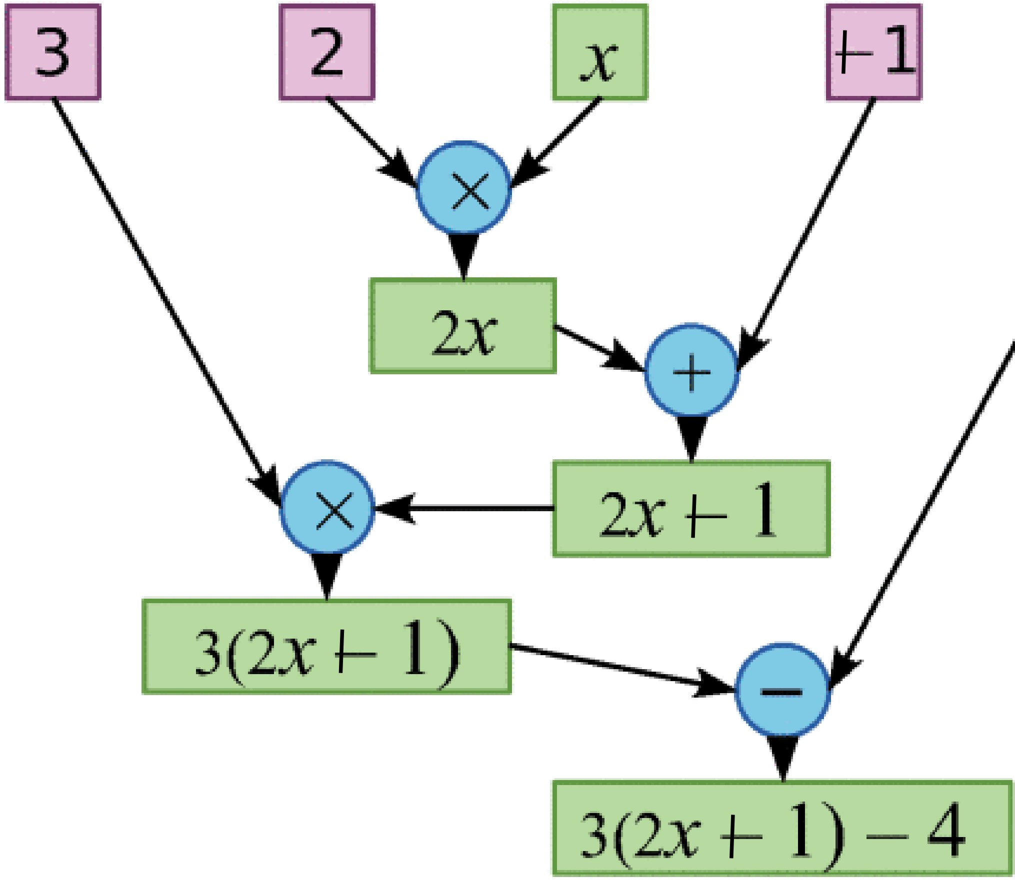
Calculer la valeur d'une expression littérale : les arbres de calculs

4) Recopie puis complète l'arbre de calcul.



Calculer l'expression pour x = 3

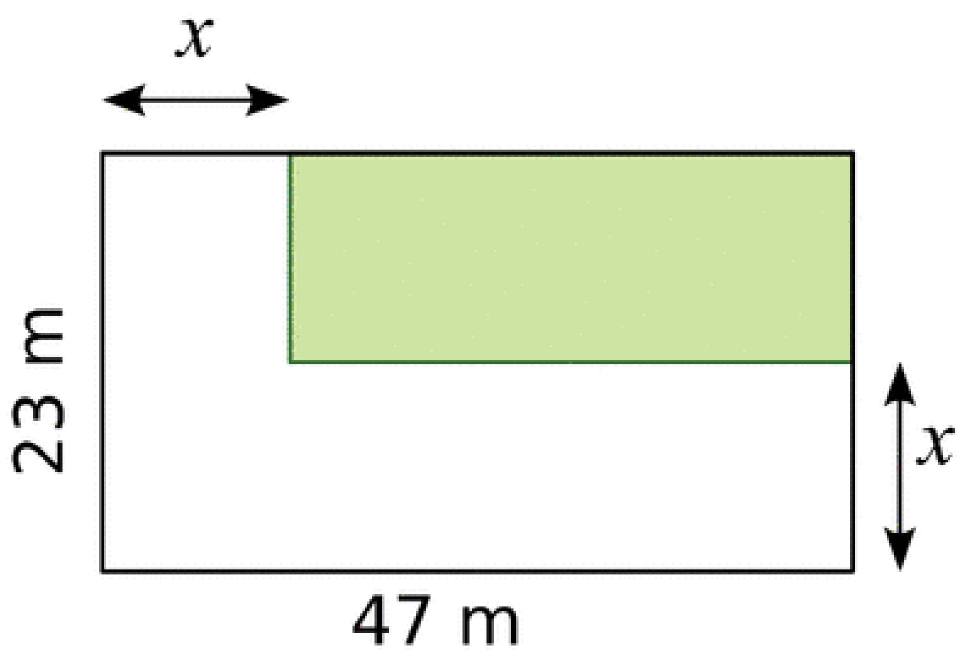
4) Recopie puis complète l'arbre de calcul.



E(3) = 3x(2x3 + 1) - 4
E(3) = 3x(6 + 1) - 4
E(3) = 3x7 - 4
E(3) = 17

Utiliser une expression littérale (formule) : en géométrie

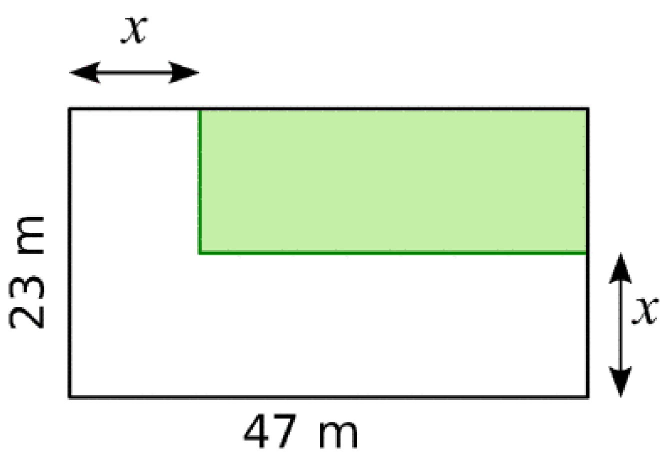
1) *Rectangles imbriqués*



a. Calcule l'aire de la partie coloriée en fonction de x.

b. Combien vaut cette aire si x = 14,7 m ?

1) *Rectangles imbriqués*



a. Calcule l'aire de la partie coloriée en fonction de x.

La longueur du rectangle colorié est de $47 - x$;

sa largeur est de $23 - x$ donc son aire vaut

$(47 - x)(23 - x)$

b. Combien vaut cette aire si $x = 14{,}7$ m ?

$(47 - 14{,}7)(23 - 14{,}7) = 32{,}3 \times 8{,}3 = 268{,}09$

Cette aire vaut 268,09 m²

2) *Un carré qui grandit*

Soit ABCD un carré de 5 cm de côté.

a. Calcule le périmètre $\mathcal{P}_1$ et l'aire $\mathcal{A}_1$ de ABCD.

b. On augmente ses côtés de k cm.
Exprime, en fonction de k :

- la longueur L du nouveau côté ;
- le nouveau périmètre $\mathcal{P}_2$ de ce carré ;
- la nouvelle aire $\mathcal{A}_2$ de ce carré ;
- l'augmentation du périmètre ;
- l'augmentation de l'aire.

2)

a. Calcule le périmètre $\mathcal{P}_1$ et l'aire $\mathcal{A}_1$ de ABCD.

$\mathcal{P}_1 = 4 \times 5 = 20$ cm $\mathcal{A}_1 = 5^2 = 25$ cm²

b. On augmente ses côtés de k cm.
Exprime, en fonction de k :

- la longueur L du nouveau côté ;

$L = 5 + k$

- le nouveau périmètre $\mathcal{P}_2$ de ce carré ;

$\mathcal{P}_2 = 4 \times (5 + k)$

- la nouvelle aire $\mathcal{A}_2$ de ce carré ;

$\mathcal{A}_2 = (5 + k)^2$

- l'augmentation du périmètre ;

Chacun des quatre côtés augmente de k cm.
Le périmètre augmente donc de $4k$ cm.

- l'augmentation de l'aire.

Le carré n°2 est composé du carré n°1, de deux rectangles de mesures 5 cm et k cm ainsi que d'un carré de côté k cm.
L'augmentation de l'aire vaut donc : $k^2 + 2 \times 5k = k^2 + 10k$

8) *Formule d'Euler - Poincaré*

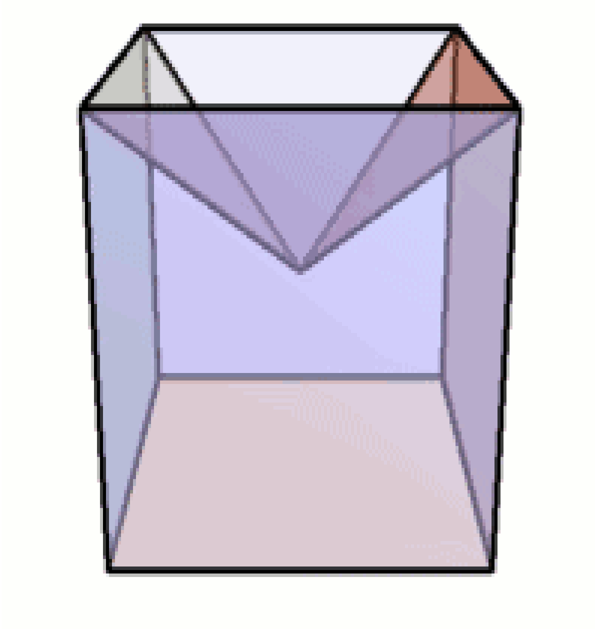
Pour certains solides convexes (par exemple le cube), il existe une formule qui relie le nombre de sommets du solide (S), son nombre d'arêtes (A) et son nombre de faces (F) :
$S - A + F = 2$.

a. Vérifie que cette formule fonctionne bien avec un cube.

b. Si on connaît A et F, peut-on trouver directement S ? Écris une formule permettant de trouver S.

c. Combien d'arêtes a un solide convexe qui a 4 sommets et 4 faces ? Dessine-le à main levée.

8)



Un cube dont la partie supérieure a été creusée en forme de pyramide inversée n’est pas convexe.

Le segment qui relierait deux sommets diagonalement opposés de la base de la pyramide passerait par l’extérieur du polyèdre.

$S - A + F = 2$.

a. Vérifie que cette formule fonctionne bien avec un cube.

Un cube a 8 sommets, 12 arêtes et 6 faces :

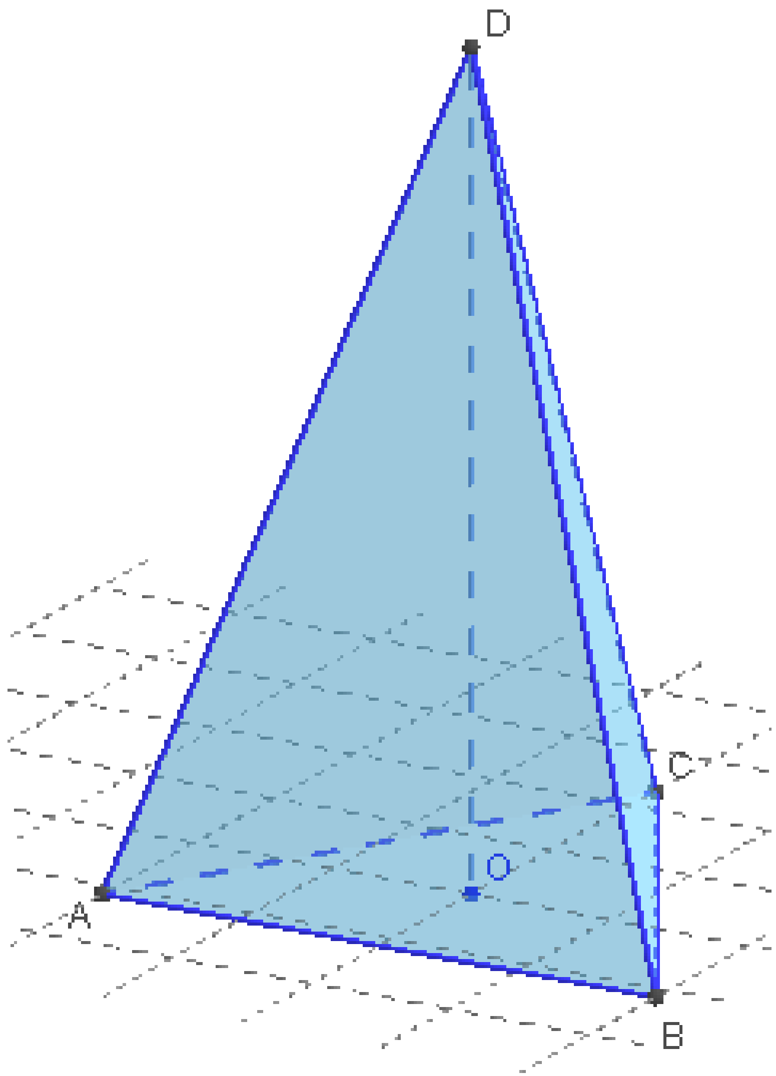
$8 - 12 + 6 = 2$

b. Si on connaît A et F, peut-on trouver directement S ? Écris une formule permettant de trouver S.

$S = 2 + A - F$

c. Combien d'arêtes a un solide convexe qui a 4 sommets et 4 faces ? Dessine-le à main levée.

$A = S + F - 2 = 6$. C'est un tétraèdre.


D
C
O
A
B